جبر خطي (2)

المحاضرة الأولى:

التطبيقات الخطية

ليكن لدينا V , U فضائين متجهين فوق الحقل K

و ليكن $f: U \to V$

نقول عن f أنه تطبيقاً خطياً إذا تحقق الشرطان الآتيان:

1] $f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2)$

2] $f(\alpha u) = \alpha f(u) \quad ; \forall u \in U \ , \ \forall \alpha \in K$

* إن الشرطين السابقين يكافئان شرطاً واحداً

$f: U \to V$ خطياً $\Leftrightarrow$

$f(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha (f u_1) + \beta f(u_2)$

مثال

ليكن $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ تطبيقاً معرفاً بالشكل $(x, y, z) \to (x-z, y+z)$

أثبت أن f تطبيقاً خطياً.

الحل: يجب أن نثبت تحقق الشرطان السابقان

① ليكن لدينا $u_1(x_1, y_1, z_1)$

$u_2(x_2, y_2, z_2)$

$f(u_1 + u_2) = f\left((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)\right)$

$= f(x_1 + x_2 , y_1 + y_2 , z_1 + z_2)$

$= [(x_1 + x_2) - (z_1 + z_2) , (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2)$

$$f(u_1+u_2) = [(x_1-z_1), (y_1+z_1) + (x_2-z_2), (y_2+z_2)]$$

$$= (x_1-z_1, y_1+z_1) + (x_2-z_2, y_2+z_2)$$

$$= f(x_1, y_1, z_1) + f(x_2, y_2, z_2)$$

$$= f(u_1) + f(u_2)$$

$$= \boxed{f(u_1+u_2)}$$

فالشرط الأول محقق.

(2)

$f(\alpha u)$; $u = (x, y, z)$

حسب القانون

$$f(\alpha u) = f(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (\alpha x - \alpha z, \alpha y + \alpha z)$$

$$= \alpha(x-z, y+z) = \alpha f(x, y, z) = \boxed{\alpha f(u)}$$

والشرط الثاني محقق

$\Leftarrow$ f تطبيقاً خطياً.

ملاحظة:

يمكن تعميم الشرط الثاني للفضاء الشعاعي بأن نقول: f تطبيقاً خطياً $\Leftrightarrow$

$$f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n)$$
$$\alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2) + \cdots + \alpha_n f(u_n)$$

مبرهنة. من خواص التطبيقات الخطية

ليكن $f: U \to V$ خطيا

وَ M_1 فضاء جزئيا من U

وَ M_2 فضاء جزئيا من V

عندئذ $f(M)$ الصورة المباشرة لعناصر المجموعة M تشكل فضاء جزئيا في V (المستقر).

و الصورة العكسية لـ M_2 ، $f^{-1}(M_2)$ فضاء جزئيا في U

<u>البرهان</u>

ليكن لدينا v_1, v_2 عنصران من $f(M)$

1] $v_1 + v_2 \in f(M)$

2] $\alpha v \in f(M)$; $\forall v \in f(M)$ ، $\alpha \in K$

$v_1 \in f(M) \Leftrightarrow$ يوجد $u_1 \in M$ بحيث $f(u_1) \in v_1$

$v_2 \in f(M) \Leftrightarrow$ يوجد $u_2 \in M$ بحيث $f(u_2) \in v_2$

$v_1 + v_2 = f(u_1) + f(u_2) = f(u_1 + u_2)$

إن $u_1 + u_2 \in M$ لأن M فضاء شعاعي جزئي ومجموع أي عنصرين من M هو من M أيضاً

$\Rightarrow f(u_1 + u_2) \in f(M)$

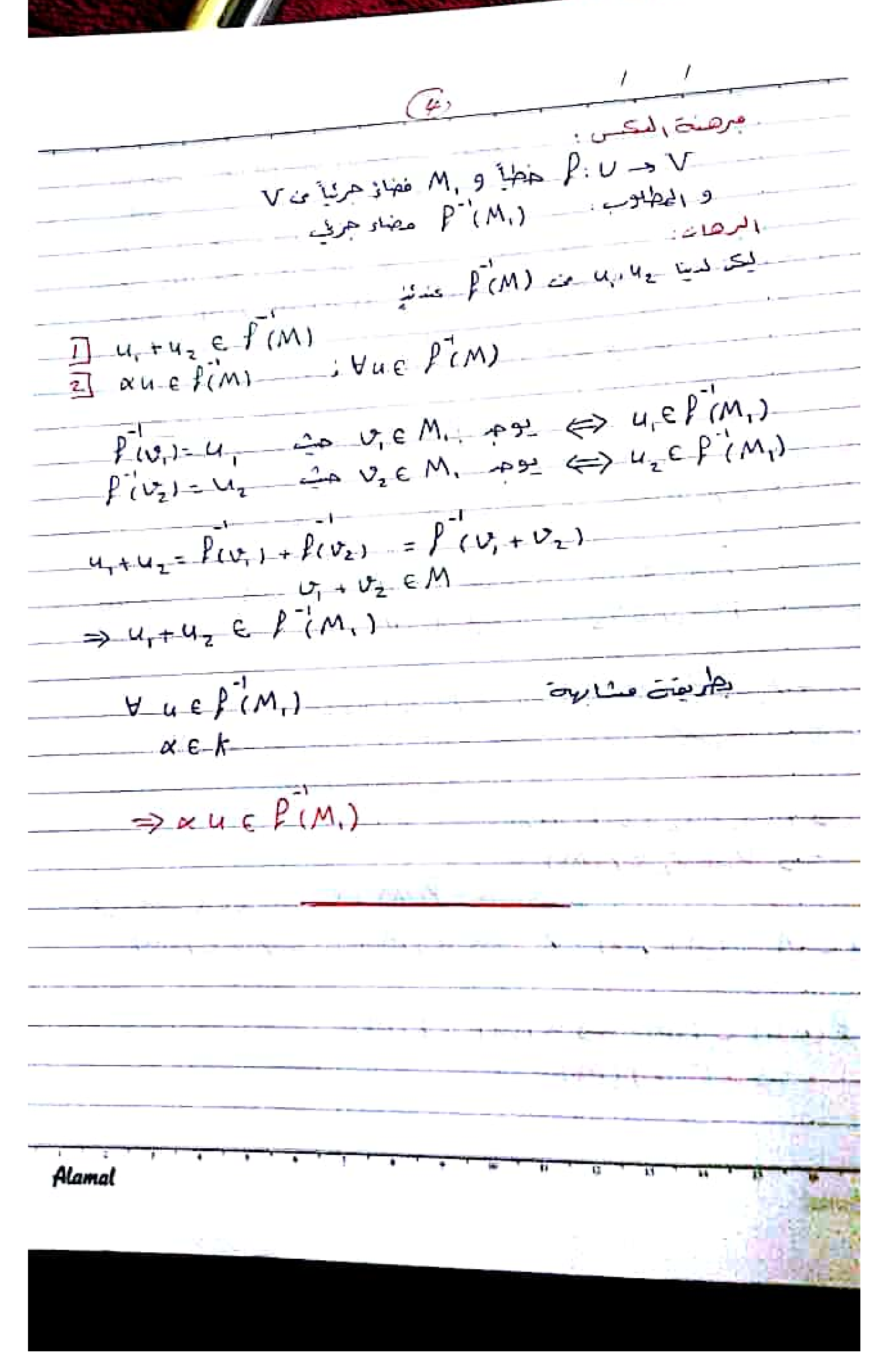
$\Rightarrow v_1 + v_2 \in f(M)$

2) ليكن $\alpha \in K$ اختياريا و $v \in f(M)$ اختياريا.

$v \in f(M) \Leftrightarrow$ يوجد $u \in M$ بحيث $f(u) = v$ وأيضاً $\alpha u \in M$

$f(\alpha u) \in f(M) \Rightarrow \alpha f(u) \in f(M)$

$\Rightarrow \alpha v \in f(M)$



(4)

مبرهنة العكس :

$f: U \to V$ خطياً و M_1 فضاء جزئياً من V

والمطلوب : $f^{-1}(M_1)$ فضاء جزئي

البرهان :

ليكن لدينا u_1, u_2 من $f^{-1}(M)$ عندئذٍ

1] $u_1 + u_2 \in f^{-1}(M)$

2] $\alpha u \in f^{-1}(M)$; $\forall u \in f^{-1}(M)$

$u_1 \in f^{-1}(M_1) \Leftrightarrow$ يوجد $v_1 \in M_1$ حيث $f^{-1}(v_1) = u_1$

$u_2 \in f^{-1}(M_1) \Leftrightarrow$ يوجد $v_2 \in M_1$ حيث $f^{-1}(v_2) = u_2$

$u_1 + u_2 = f^{-1}(v_1) + f^{-1}(v_2) = f^{-1}(v_1 + v_2)$

$v_1 + v_2 \in M$

$\Rightarrow u_1 + u_2 \in f^{-1}(M_1)$

بطريقة مشابهة

$\forall u \in f^{-1}(M_1)$

$\alpha \in K$

$\Rightarrow \alpha u \in f^{-1}(M_1)$

Alamal